Esercizio; $\boxed{B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)}$ a blocchi

B diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A e C sono entrambe diagonalizzabili

dim: 1° modo: Usare il teorema di diagonalizzabilità

Matrice M è diag. $\Leftrightarrow$ 1) e 2)

1) $p_B(\lambda) = p_A(\lambda) \cdot p_C(\lambda)$ Le radici di $p_B(\lambda)$ sono quelle di $p_A(\lambda)$ unite a quelle di $p_C(\lambda)$

Quindi le radici di $p_B(\lambda)$ sono tutte in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ lo sono sia quelle di $p_A(\lambda)$ che di $p_C(\lambda)$

2) Sia λ autovalore per B $\quad m_a^B(\lambda) = m_a^A(\lambda) + m_a^C(\lambda)$ $\leftarrow$

Ora dimostro che $\quad m_g^B(\lambda) = m_g^A(\lambda) + m_g^C(\lambda)$ $\leftarrow$

$$m_g^B(\lambda) = \dim\ker(B-\lambda I) = \dim\ker \begin{array}{cc} & \overbrace{}^{k} \\ k\{ & \begin{pmatrix} A-\lambda I & 0 \\ 0 & C-\lambda I \end{pmatrix} \}h \\ & \underbrace{}_{h} \end{array} \qquad n = k+h$$

$$= \dim\ker(A-\lambda I) + \dim\ker(C-\lambda I)$$

$$n - rk \begin{pmatrix} A-\lambda I & 0 \\ 0 & C-\lambda I \end{pmatrix} = \star$$

Ex: $\boxed{rk \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = rk\, M + rk\, N}$

$$\star = \underset{k+h}{n} - \Big(rk(A-\lambda I) + rk(C-\lambda I) \Big) = \underbrace{\big(k - rk(A-\lambda I)\big) + \big(h - rk(C-\lambda I)\big)}_{\dim\ker(A-\lambda I) + \dim\ker(C-\lambda I)}$$

$$m_a^B(\lambda) = m_a^A(\lambda) + m_a^C(\lambda)$$
$$\begin{array}{ccccc} \| & \Leftarrow & \| & & \| \end{array}$$
$$m_g^B(\lambda) = m_g^A(\lambda) + m_g^C(\lambda)$$

Se $m_g = m_a$ in A e in C, allora anche in B

se A e C diag. $\Rightarrow$ B diag.

$$m_a^B(\lambda) = m_a^A(\lambda) + m_a^C(\lambda)$$
$$\begin{array}{ccccc} \| & \Rightarrow & \| & & \| \end{array}$$
$$m_g^B(\lambda) = m_g^A(\lambda) + m_g^C(\lambda)$$

Se $m_a = m_g$ in B $\Rightarrow$ anche in A e C $\square$

<u>2° modo</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ Se A e C sono diag.bili $\quad A = k \times k$

Sia $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$ base di autovettori $\quad C \; h \times h$

Sia $w_1, \dots, w_h \in \mathbb{R}^h$ " per A " " per C

$$\underset{n\times n}{B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}h \end{matrix}$$

$$B\bar{v}_1 = \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}} \underset{n}{\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} Av_1 + 0 \\ 0v_1 + C\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$Av_1 = \lambda v_1$

v_1 autovettore per A

$\bar{v}_1 \in \mathbb{R}^n$

$$= \begin{pmatrix} Av_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \bar{v}_1$$

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ sono autovettori di B

w_1 autovettore per C

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline w_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}h \end{matrix} \qquad Cw_1 = \lambda w_1$$

$$B\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cdot 0 + 0\cdot w_1 \\ 0\cdot 0 + C\cdot w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Cw_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda w_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \lambda \bar{w}_1$$

Ho ottenuto autovettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_h$ per B

Es: Sono indipendenti. Quindi sono una base per $\mathbb{R}^n$
sono $k+h=n$

Es 5.13: $T: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ $\mathbb{R}_n[x] = \{p(x),\ \deg p(x) \leq n\}$

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$

$T(p(x)) = (x+1) \cdot p'(x)$ $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

T è diagonalizzabile?

Svolgimento: $T(1) = (x+1) \cdot 0 = 0$

$T(x) = (x+1) \cdot 1 = x+1$

$T(x^2) = (x+1) \cdot 2x = 2x^2 + 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 0 \dots$

$T(x^i) = (x+1) \cdot n x^{n-1} = n x^i + n x^{i-1}$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad i \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & p & & \\ & 1 & 2 & 0 & \vdots & & \\ & 0 & 2 & 3 & 0 & & \\ & & 0 & 3 & i & & \\ & & & & n & & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots & & n \end{pmatrix} \end{array} = A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$$ è triangolare superiore

Gli elementi sulla diagonale sono $0, 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow$ sono tutti distinti $\Rightarrow$ A è diag.bile

Es 5.14 $\quad T: V \to V \qquad T \circ T = T$

1) $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$

svolgimento: Devo dimostrare che $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

$v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T \qquad v \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \boxed{v = T(u)}$ (2)

$v \in \ker T \Rightarrow \boxed{T(v) = 0}$ (1)

(1) $\quad T(v) = 0 \Rightarrow T(T(u)) = 0 \Rightarrow T(u) = 0 \Rightarrow v = 0$

Fatto generale: $\quad U, W \subseteq V \qquad \underset{k+h}{V} = \underset{k}{U} \oplus \underset{h}{W} \to U \cap W = \{0\}$

$\to U + W = V$

Con Grassmann: $\quad \underbrace{\dim U + W}_{k+h} = \underbrace{\dim U}_{k} + \underbrace{\dim W}_{h}$

Per Teorema dimensione $\quad \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

Quindi ho anche $V = \ker T + \operatorname{Im} T$

2) $V_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}$ autospazio

Dimostra che $V_0 = \ker T$ e $V_1 = \operatorname{Im} T$.

sempre vero

da dimostrare

Tesi: $V_1 = \operatorname{Im} T$

$\boxed{V_1 \supseteq \operatorname{Im} T}$ Devo mostrare che se $v \in \operatorname{Im} T$ allora $v \in V_1$

$v \in \operatorname{Im} T$ cioè $\underbrace{v = T(u)}_{Hp} \overset{?}{\Longrightarrow} \underbrace{T(v) = v}_{Ts}$

Sì: $T(v) = T(T(u)) = T(u) = v$

Sappiamo che $V_0 \oplus V_1$ autospazi sono in somma diretta

$\ker T \oplus \operatorname{Im} T$

dim V_1 = dim $\operatorname{Im} T$

$V_1 \supseteq \operatorname{Im} T$ $\Rightarrow V_1 = \operatorname{Im} T$

3) T è diag.bile perché $V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T = V_0 \oplus V_1$

$\operatorname{Ker} T = V_0$, $\operatorname{Im} T = V_1$

La diagonalizzabilità di T si può dimostrare con Jordan.

FORMA DI JORDAN

6.1: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ $\quad -35+36$

$= (\lambda+1)^2 \qquad \lambda = -1 \quad m_a = 2$

Possibili J: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \longleftarrow$

$m_g(-1) = 2 - \operatorname{rk}(A+I) = 2 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$

blocchi

$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ -9 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 9-\lambda & 7 & 3 \\ -9 & -7-\lambda & -4 \\ 4 & 4 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (9-\lambda) \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -4 \\ 4 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 9 \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -7-\lambda & -4 \end{pmatrix}$$

$$= (9-\lambda)\big((-7-\lambda)(4-\lambda) + 16\big) + 9\big((4-\lambda)7 - 12\big) +$$

$$+ 4\big(-28 - 3(-7-\lambda)\big)$$

$$= (9-\lambda)\left(\lambda^2 + 3\lambda - 28 + 16\right) + 9\left(-7\lambda + 16\right) +$$

$$+ 4\left(-7 + 3\lambda\right)$$

$$= (9-\lambda)\left(\lambda^2 + 3\lambda - 12\right) - 63\lambda + 144 - 28 + 12\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 12\lambda + 9\lambda^2 + 27\lambda - 108 - 63\lambda + 144 - 28 + 12\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

cerco radici che dividono 8

$\lambda = 2$: $-8 \quad 24 \quad -24 \quad +8 \quad = 0$

$$= -(\lambda - 2)^3$$

autovalore $\lambda = 2$ con $m_a(2) = 3$

Possibili J: $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$m_g(2) = 3 \qquad 2 \qquad 1$

$$m_g(2) = \dim \operatorname{Ker}(A - 2I) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 \\ -9 & -9 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 6\right) + \left(4 - 4\lambda + 6\right) + \left(-12 + 3\lambda\right)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 5\lambda^2 - 5\lambda - 30 + 10 - 4\lambda - 12 + 3\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0 \qquad \lambda = -2$$

$$+8 \quad +24 \quad -32 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 & \lambda + 2 \\ \hline -\lambda^3 - 2\lambda^2 & -\lambda^2 + 8\lambda - 16 \\ \hline 8\lambda^2 - 32 & \\ 8\lambda^2 + 16\lambda & \\ \hline -16\lambda - 32 & \end{array}$$

$$p(\lambda) = (\lambda+2)\left(-\lambda^2 + 8\lambda - 16\right)$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-4)^2$$

$$m_a(-2) = 1$$

$$m_a(4) = 2$$

$$\boxed{\lambda = -2, 4, 4}$$

Possibili J:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-2} & & \\ & \boxed{4} & \\ & & \boxed{4} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \boxed{-2} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ & 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1$$

Calcolare $m_g(4)$

$$m_g(4) = 3 - rk(A - 4I) = 3 - rk\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

POLINOMI DI MATRICI

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \cdot 1 \qquad A \text{ matrice } k \times k \text{ quadrata}$$

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

Esercizio 6.10: A matrice 7×7 t.c. $(A-I)^3 = 0$ matrice e $\mathrm{rk}(A-I)^2 = 2$

Qual è la forma di Jordan di A?

EQUAZIONE POLINOMIALE

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$$

$$p(x) = (x-1)^3 \qquad p(A) = (A-I)^3 = 0$$

Prop: Se $A \sim B$ simili, $p(A) = 0 \iff p(B) = 0$

dim: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$$\boxed{p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I = 0} \Leftarrow \text{matrice}$$

$A = M^{-1} B M$ sostituisco

$$p(A) = a_n (M^{-1}BM)^n + \dots + a_1 (M^{-1}BM) + a_0 M^{-1}M = 0$$

$$a_n M^{-1} B^n M + \dots + a_1 M^{-1} B M + a_0 M^{-1} I M = 0$$

$$M^{-1}(a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B + a_0 I) M = 0$$

moltiplico a sx per M
a dx per M^{-1}

$$\boxed{a_n B^n + \dots \dots + a_1 B + a_0 I = 0}$$

$\square$

Cor: Se J è la matrice di Jordan di A, p(x) polinomio

$$\boxed{p(A) = 0 \iff p(J) = 0}$$

Esercizio: 7×7 $\boxed{(A-I)^3 = 0}$ $\operatorname{rk}(A-I)^2 = 2$ Chi è J?

$\Downarrow$

Quali sono le J t.c. $(J-I)^3 = 0$?

Altro passaggio:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

Blocchi di Jordan

p(x) polinomio

$p(J) = 0 \iff p(B_i) = 0$
$\forall i = 1, \dots, k$

infatti:

$$p(J) = \begin{pmatrix} \boxed{p(B_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{p(B_k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(J) = 0 \iff p(B_i) = 0 \quad \forall i$$

Riassunto: A t.c. $p(A) = 0 \iff p(J) = 0 \iff p(B_i) = 0$

J è la matrice di Jordan di A — blocchi di J

Esercizio: A t.c. $(A-I)^3 = 0 \Rightarrow (J-I)^3 = 0$

$$\Rightarrow (B_i - I)^3 = 0$$

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

Classificare i blocchi di Jordan possibili B per cui $(B-I)^3 = 0$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad B - I = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda-1 \end{pmatrix}^3 = 0$$

nilpotente $\Rightarrow$ autovalori tutti zero $\Rightarrow \lambda = 1$

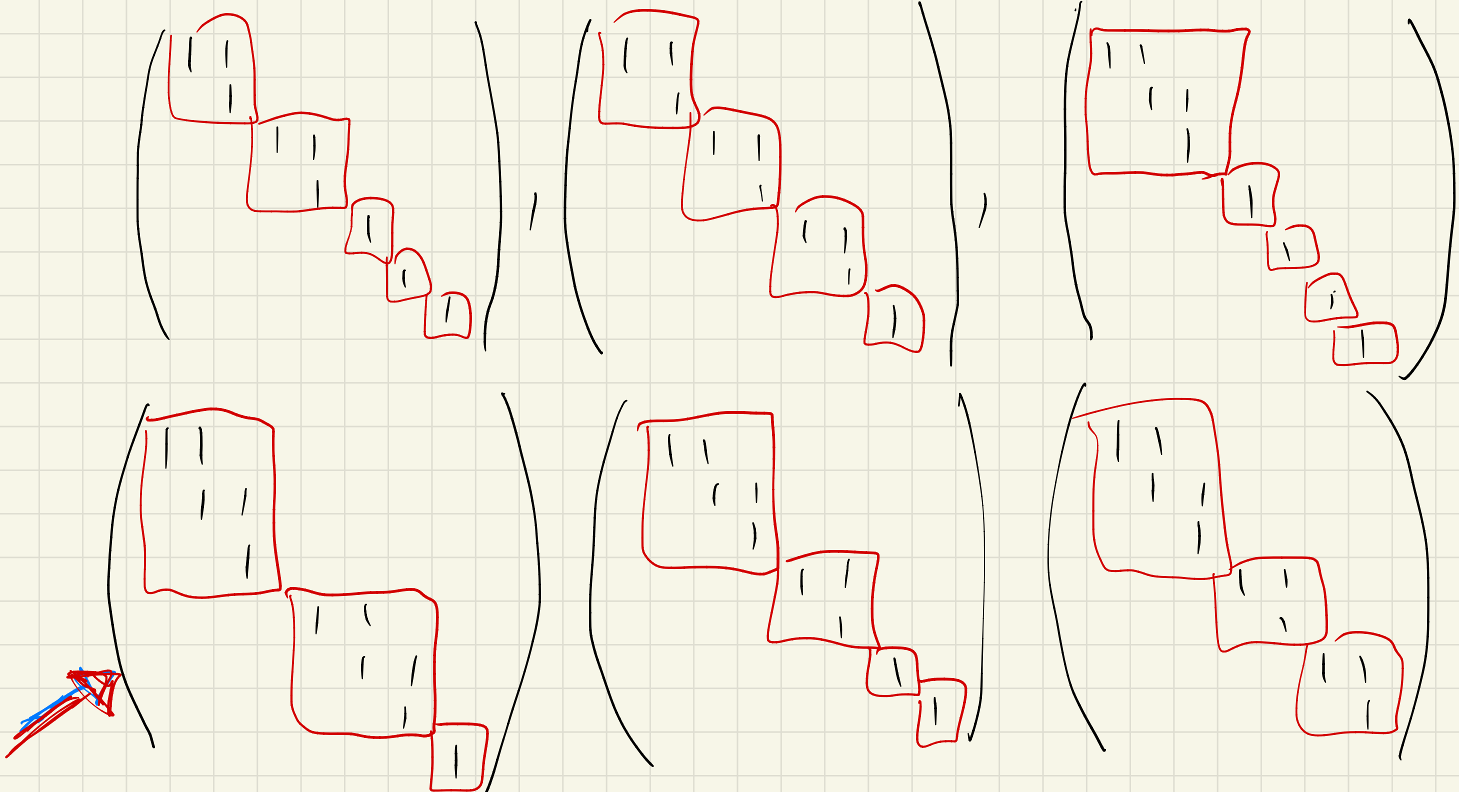
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad B - I = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{n}^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n \leq 3$$

Conclusione: $(A - I)^3 = 0 \iff$ Autovalori tutti 1 e blocchi di taglia al massimo 3

Possibili J per A

7×7

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$



$$\operatorname{rk}(A-I)^{2} = 2$$

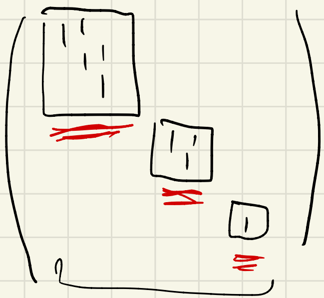
$$m_g^{2}(1) = \dim\ker(A-I)^{2} = 7 - \underbrace{\operatorname{rk}(A-I)^{2}}_{2} = 7-2 = 5$$

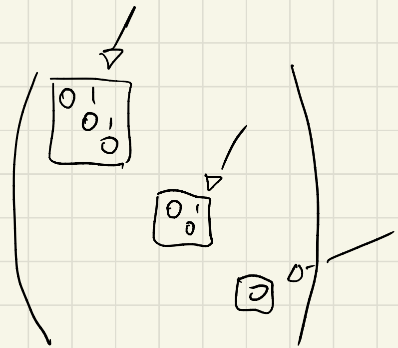
$m_g(1) = \#$ blocchi (di taglia ≥ 1)

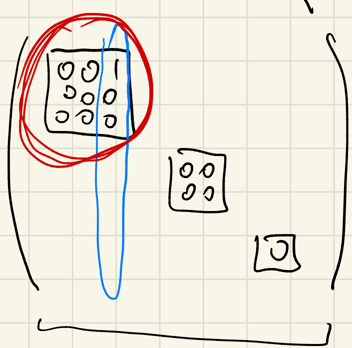
$m_g^2(1) - m_g(1) = \#$ blocchi di taglia ≥ 2

$m_g^2(1) = \#$ blocchi di taglia ≥ 2 $+$ $\#$ blocchi $= 5$

Cerco J t.c. $\operatorname{rk}(J-I)^2 = 2$

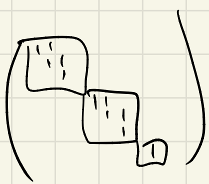
$J =$ 

$J - I =$ 

$(J-I)^2 =$ 

$\operatorname{rk}(J-I)^2 = 2$

se ci sono 2 blocchi di ordine 3

Quindi $J =$ 

$T: V \to V$ e $T^2 = T$ $\Rightarrow$ T diagonalizzabile

Con Jordan è più facile:

Prendo base $T \rightsquigarrow A$ matrice

$T \circ T = T \rightsquigarrow A \cdot A = A$ cioè $A^2 = A$

L'esercizio diventa: Se $A^2 = A$ allora A diag.bile.

Svolgimento: $A^2 - A = 0$ $\quad p(x) = x^2 - x \quad p(A) = 0$

relazione polinomiale

$\Rightarrow J^2 - J = 0$ cioè $J^2 = J$ $\Rightarrow$ $B^2 = B$

Domanda: Per quali $B_{\lambda,n}$ vale $B_{\lambda,n}^2 = B_{\lambda,n}$?

$$B_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad B_{\lambda,n}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 2\lambda \\ & & & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$(\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$B_{\lambda,n} = B_{\lambda,n}^2 \iff \lambda = 1$ oppure 0 & il blocco è di ordine 1

$\lambda = \lambda^2$

$\cancel{A(A-I)=0 \Rightarrow A = 0, I}$ NO

$B = \boxed{(0)}$ oppure $\boxed{(1)}$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & & & \\ & \boxed{0} & & & & & \\ & & \boxed{0} & & & & \\ & & & \boxed{1} & & & \\ & & & & \boxed{1} & & \\ & & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

A diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Caso 2×2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es: 6.11 & 6.12 & 6.3 & 6.2 senza pol. minimo

$A^2 = I \Rightarrow \cancel{A = \pm I}$ NO

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\boxed{A^n = I \Rightarrow A \text{ diag.}}$

Es: Se $A^2 = I$ allora A diag.

e gli autovalori sono ± 1

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A$